

Assignatura: Matemàtiques Avançades

Optativa del Grau en Enginyeria en Sistemes Audiovisuals

Índex

1 Motivació de l'Assignatura

2 Temari de l'assignatura (amb comentaris)

3. Les pràctiques de l'assignatura.

1. Motivació de l'Assignatura

Aquesta assignatura té per objectiu oferir una introducció als fonaments computacionals de l' Enginyeria en Sistemes Audiovisuals. Més concretament ens centrarem en l'estudi dels algorismes numèrics i d'optimització que estan al darrere de moltes tasques en processat d'imatge i de vídeo, visió per computador, reconstrucció 3D, en tasques de classificació i de cerca, per exemple de música en una base de dades o de cadenes de DNA, en reconeixement de patrons, en xarxes neurals, i un llarg etcètera que anirem precisant durant el curs.

Deixant clar que totes les assignatures optatives són independents, és important notar que aquesta assignatura ofereix una perspectiva de gran utilitat a l'hora d'aprofundir en els aspectes més avançats d'una sèrie d'altres assignatures optatives (o no) relacionades amb els temes abans esmentats.

Hem de reconèixer que el nom de l'assignatura no fa justícia al seu contingut. Doncs recomanem als interessats que mirin el contingut del temari.

Hem de reconèixer també que la temàtica és ambiciosa ja que, d'una banda pretenem cobrir una sèrie d'algorismes de gran utilitat transversal i d'altra banda explicar com els algorismes s'apliquen a problemes concrets, explicant el seu context i els aspectes de modelització sots jacents. És a dir, partint d'un problema real, intentarem crear un model que el representi i que es pugui traduir en un algorisme efectiu per a resoldre'l. Seleccionarem els models de forma adequada de manera que l'alumne pugui transitar de manera còmoda per aquestos múltiples camins. Queda clar que donat el contingut el temari, no es tracta d'una assignatura de matemàtiques plena de demostracions. Ara be, fer càlculs (i analitzar exemples) és inevitable si volem comprendre l'essencial.

En altres paraules tindrem en compte els tres aspectes bàsics següents: modelització, anàlisi/computació i experimentació, encara que el pes més important de l'assignatura estarà en la part de computació.

2 Temari de l'assignatura (amb comentaris)

Tema 1. Introducció i motivació: Exemples de problemes d'optimització.

- a) Càlcul del flux òptic en seqüències de vídeo. El flux òptic representa el camp de moviment en una seqüència de vídeo. Exemples: control del moviment d'una pilota en jocs per ordinador, seguiment d'objectes, compressió de vídeo, alineament d'imatges, etc.
- b) Càlcul de profunditats per a la reconstrucció d'escenes 3D . Exemple: reconstrucció de ciutats.
- c) Problemes de classificació: Support Vector machines. Exemple: detecció i identificació de logotips.
- d) Problemes de restauració d'imatges i de vídeo. Problemes de super-resolució. Exemple: a partir d'un vídeo de vigilància que ha observat a un eventual infractor augmentar la seva resolució per a poder veure els detalls de la persona.
- e) Problemes de regressió i aprenentatge a partir de dades.

Aquests models serviran d'exemple al llarg del curs i aplicarem els diversos algorismes proposats per a la seva resolució numèrica.

Tema 2. Complementos d'àlgebra lineal. Normes i mesures d'error. Mínims quadrats. Descomposició en valors singulars (singular value decomposition).

Aquest tema té per objectiu fer un repàs de l'àlgebra lineal, en particular del càlcul de valors i vectors propis. En aquest context parlarem de l'algorisme per a calcular la descomposició en valors singulars i les seves aplicacions. Per esmentar-ne dues: aplicació en problemes de calibració de càmeres i reducció de dimensionalitat en conjunts de dades (com representar dades multi-dimensionals a partir de variables significatives).

Explicarem també les normes més utilitzades en mesures d'error. La norma euclidiana n'és un exemple, però no l'únic i altres normes (L^p) són útils en la pràctica. Per exemple, l'anomenada norma L^1 és molt útil ja que és robusta a outliers (valors aberrants) i està relacionada amb estadístics robusts, en aquest cas el valor medià. Aquesta norma és molt útil en problemes de representació 'sparse' de dades a partir dels elements d'un diccionari ja que permet representar les dades de manera més econòmica.

Explicarem també el problema de regressió o d'ajust de dades per mínims quadrats. Aquesta és una de les aproximacions més standard i útils en la pràctica.

Tema 3. Màxims i mínims, multiplicadors de Lagrange. Convexitat. Problemes d'optimització amb restriccions convexes: Condicions d'optimalitat de Kuhn-Tucker.

Donarem una introducció al càlcul de màxims i mínims per a funcions de diverses variables. Explicarem el problema del càlcul de màxims i mínims de funcions amb restriccions sobre les variables: La tècnica emprada és coneguda com a multiplicadors de Lagrange. Recordarem el significat i interpretació física de la solució.

Definirem les funcions convexes i explicarem com les funcions convexes (no idènticament infinites) tenen mínims. Aquest és el fonament més important per a l'estudi de problemes d'optimització. Estudiarem com calcular el mínim d'una funció convexa amb restriccions convexes sobre les variables. Les solucions satisfan les anomenades condicions d'optimalitat de Kuhn-Tucker que permeten escriure les equacions per al seu càlcul.

Tema 4. Optimització sense restriccions. Algorismes de cerca en línies. Algorismes de descens de gradient. Algorisme de gradient conjugat. Mètodes de Newton. Mètode de Gauss-Newton. Algorismes de regió de confiança: Algorisme de Levenberg-Marquardt.

Aquests algorismes són fonamentals en la solució de problemes pràctics ja que permeten calcular mínims de funcions no lineals de moltes variables. L'estructura general ve donada per la idea de cerca al llarg de línies de descens de la funció objectiu (a optimitzar). L'algorisme de descens del gradient cerca en la direcció oposada al gradient. L'algorisme de gradient conjugat proposa altres cerques que són més efectives en el cas de problemes quadràtics (amb matriu definida positiva). L'algorisme de Newton permet calcular els zeros de funcions no lineals, en particular permet resoldre problemes de minimització. L'algorisme de Gauss-Newton és una variant de Newton adaptada a la solució de problemes de mínims quadrats no lineals. L'algorisme de Levenberg-Marquardt és una variant del mètode de Gauss-Newton. És de gran utilitat en calibració de càmeres (càlcul dels paràmetres de la càmera com la distància focal, el centre òptic, etc. I també de la seva posició en l'espai) per a optimitzar els funcionals d'error que descriuen la bondat d'ajust dels paràmetres cercats.

Aplicacions: a) càlcul del flux òptic, b) alineament de dues imatges, c) càlcul de la profunditat en reconstrucció 3D, d) càlcul dels paràmetres d'una càmera, e) entrenament d'una xarxa neural en problemes de regressió.

Recordarem també els mètodes iteratius per a resoldre sistemes lineals.

Tema 5. Optimització amb restriccions. Condicions d'optimalitat de Kuhn-Tucker. El mètode de penalització. Barreres. El mètode de Lagrangia augmentat. Dualitat. Algorismes primals-duals.

Abordarem en aquest capítol la solució de problemes d'optimització amb restriccions. Recordarem les condicions d'optimalitat de Kuhn-Tucker. Explicarem els mètodes de penalització, el mètode de barreres logarítmiques i el mètode del Lagrangia augmentat.

Explicarem el concepte de dualitat i els algorismes primals-duals. Utilitzarem exemples de problemes lineals amb restriccions lineals i exemples de problemes no lineals relacionats amb el mètode de regularització per a la solució de problemes "mal-posats" (ill-posed). Tornarem a utilitzar-lo en el capítol següent on tractarem problemes d'optimització quadràtica.

Aplicacions: a) restauració d'imatges, b) problemes d'optimització amb regularitzadors robustos (per exemple: reconstrucció 3D de superfícies a partir de núvols de dades aproximades), c) problemes d'optimització lineal amb restriccions.

Tema 6. Problemes quadràtics. Exemples: alguns problemes d'optimització associats a la classificació: support vector machines (SVM).

Ens centrarem en l'estudi d'alguns problemes quadràtics que apareixen en classificació de patrons (teoria estadística de l'aprenentatge). Estudiarem la seva formulació primal, la dual i la formulació primal dual. Estudiarem el mètode de projecció del gradient. Estudiarem també un mètode basat en la solució del problema primal-dual.

Tema 7. El mètode del Simplex. Programació dinàmica. El problema de flux màxim i tall mínim o Max-flow/min-cut.

L'objectiu és explicar aquests algorismes que han adquirit una importància enorme degut a la seva capacitat per a resoldre problemes no lineals de gran complexitat.

Aquests algorismes tenen una gran versatilitat i s'han aplicat a molts problemes pràctics com, per exemple, cerca de música en grans bases de dades, identificació de cadenes de DNA (o de text), càlcul de la disparitat (profunditats) en problemes de estèreo, segmentació d'imatges, i un llarg etcètera.

Tema 8. Algorismes de Montecarlo. Algorisme de Metropolis-Hastings.

Si hi ha temps, explicarem breument els fonaments dels algorismes de MonteCarlo i l'algorisme de Metropolis-Hastings que permet mostrejar de manera efectiva una distribució de probabilitats multi-dimensional i calcular valors esperats i altres quantitats estadístiques.

3. Les pràctiques de l'assignatura.

Clarament, aquesta assignatura no té sentit sense les pràctiques. El nombre d'algorismes explicats és clarament superior a les pràctiques que un alumne pot fer raonablement durant el curs, de manera que proporcionarem accés a codis o llibreries que tinguin implementats alguns dels algorismes de base. Aquest serà el cas per exemple per a l'algorisme de Max Flow/Min Cut. En altres casos, suggerirem la implementació. Considerem molt important agafar experiència pròpia i directa a partir de la implementació dels algorismes i l'experimentació amb ells. La utilitat és doble: d'una banda ser conscients de la seves qualitats, de les dificultats que plantegen i també de la metodologia de validació. Això ens permetrà posar en evidència la interacció entre la modelització i l'experimentació.

Haurem de precisar el número de pràctiques a realitzar per l'alumne.